**Ejercicios de Teoría de Colas**

1. La cola rápida de un supermercado tiene un solo cajero. Se estudia esta cola y se ha determinado que los clientes llegan de acuerdo a un proceso Poisson con tasa media de 30 clientes por hora y que el tiempo necesario para que un cliente sea atendido sigue una distribución exponencial con media de 1 minuto.
   1. Hallar los valores de 
   2. En promedio ¿cuántos clientes hay que se están atendiendo o están esperando?
   3. En promedio ¿cuánto tiempo permanece un cliente desde que llega hasta que se retira?
   4. Halle la probabilidad de que el servidor esté ocioso
   5. Halle la probabilidad de que la cola esté vacía
   6. Halle la probabilidad de que la cola tenga más de un cliente.
2. En un sistema con una cola y 2 servidores, los clientes llegan en promedio cada medio minuto siguiendo una distribución exponencial. El tiempo de servicio por cada servidor sigue una distribución exponencial con media 0.75 minutos.
   1. Calcular la probabilidad de que haya un cliente en la cola.
   2. Calcular la probabilidad de que haya clientes en la cola.
   3. Calcular el número promedio de clientes en el sistema.
   4. Una persona visitó dos días diferentes el sistema, el primer día encontró cola y el otro día no. Calcular la probabilidad de que eso haya ocurrido.
   5. ¿Cuántos servidores debe haber para que el número promedio de clientes en el sistema baje al 10% del valor inicial?
3. Se estudia la atención en un banco con cajero automático. Suponga que los clientes llegan según una distribución de probabilidad de Poisson, con una tasa media de 30 clientes por hora y que los tiempos de servicio siguen una distribución de probabilidad exponencial, con una tasa media de servicio de 40 clientes por hora con un solo cajero automático rápido.

**Un solo servidor, M/M/1**

** = 30 clientes por hora**

** = 40 clientes por hora**

**s = 1 servidor**

* 1. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya clientes en la cola?

**Es decir, probabilidad de que no haya cola. Es decir, que no haya clientes y que haya uno: p0 + p1 = Cp1**

* 1. ¿Cuál es la probabilidad de haya un máximo de dos clientes en la cola?

**Lo máximo que se permite es 2 clientes en la cola. Es decir, p0 + p1 + p2 y el tercero, p3, hace que hayan dos en la cola. Es decir, Cp3.**

* 1. ¿Cuál es la cantidad promedio de clientes que esperan a ser atendidos?

**Lq**

Se ha dispuesto que haya tres cajeros automáticos menos rápidos, cada uno de ellos atiende con un tiempo de servicio que sigue una distribución de probabilidad exponencial a una razón promedio de 12 clientes por hora. Si hay con una sola cola conjunta, determinar:

**Ahora hay es un modelo M/M/3**

** = 30 clientes por hora**

** = 12 clientes por hora**

**s = 3 servidor**

* 1. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya clientes en la cola?

**Es decir, la probabilidad de que no haya cola. Cp3.**

* 1. ¿Cuál es la cantidad promedio de clientes en la cola?

**Lq**

* 1. ¿Cuál es el tiempo promedio que los clientes permanecen en el banco, en minutos?

**w**

* 1. ¿Cuál es la probabilidad de que los 3 cajeros estén ocupados?

**¿cuántos clientes se necesitan para que estén los 3 cajeros ocupados? 3, 4, 5, 6, … Es decir, 1 – Cp2.**

* 1. Determine la probabilidad de que haya como máximo dos cajeros libres.

**2 cajeros libres implica que haya 1 cliente, o sea p1.**

**Si hay 1 cajero libre, hay 2 clientes, o sea p2.**

**Si hay 0 cajeros libres, hay 3 o más clientes, o sea 1 – Cp2**

**p1 + p2 + p3 + … = 1 – Cp0 que es lo mismo que Cp0.**

* 1. Determine la probabilidad de que haya cola.

**1 – Cp3**

1. En el consultorio de un doctor, él es el único que atiende. Sus pacientes pasan a la sala de espera (la cola) hasta que son atendidos cuando el doctor esté disponible. En promedio llegan 4 pacientes por hora, con una distribución Poisson y cada uno requiere en promedio 12 minutos de atención, con una distribución exponencial.
   1. ¿Cuántas sillas deberá tener la sala de espera, como mínimo, para que haya una probabilidad de 0.4 o más de estar sentado en la sala de espera?
   2. Si hay 3 sillas ¿qué probabilidad se tiene de que haya personas de pie en la sala de espera?

Si la esposa del doctor es de la misma especialidad y va a compartir con él su consultorio, de tal forma que los pacientes son los mismos del doctor, pero ahora pueden ser atendidos al azar por cualquiera de los doctores:

* 1. Calcular la probabilidad de que ambos doctores estén ocupados.
  2. Calcular la probabilidad de que no haya pacientes en la sala de espera.

1. El dueño de un restaurante está estudiando la modificación de su local. Para simplificar asume que los clientes llegan a una tasa de llegadas variable que se puede modelar como una distribución Poisson con media 0.4 clientes por minuto. Los estudios de tiempo indican que en promedio los clientes se quedan en el comedor 14 minutos (tiempo de servicio). En el comedor se tienen disponibles 10 lugares para comer (individuales), si hay más clientes que lugares, esperan dentro del restaurante en la sala de espera, de donde van pasando al comedor en orden de llegada.
   1. Identifique el tipo de modelo de colas señalando los valores de **s,  y **

**0.4 clientes por minuto**

**s = 10 mesas disponibles**

**1/14 minutos por cliente**

**14 clientes por minuto**

**Dado que tienen distribución Poisson, el modelo es M/M/10 (velocidad de llegada Markoviana/velocidad de servicio Markoviana/10 mesas disponibles)**

* 1. Estime la probabilidad de que el restaurante esté sin clientes

**p0 = 0.0036572136 (usar CalcularColas.xlsx)**

* 1. Determine el número esperado de clientes en el restaurante

**L = longitud del sistema (cantidad de clientes en todo el sistema)**

**Lq = longitud de la cola**

**L = 5.68842 (usar CalcularColas.xlsx)**

* 1. Determine la probabilidad de que un cliente encuentre asiento en el comedor

**Contando al cliente: p(esté sentado) = Cp10 – p0**

**Sin contar al cliente: p(encuentre asiento) = Cp9**

**Este tipo de preguntas es muy ambigua y no tenemos las suficientes herramientas para responderla. Podría ser, ¿cuál es la probabilidad de que haya asiento(s) libre? Ahí sería Cp9.**

**Cp9 = 0.9305271858 (usar CalcularColas.xlsx)**

* 1. Determine la probabilidad de que haya dos clientes en la sala de espera

**p12 = 0.0095861368 (usar CalcularColas.xlsx)**

1. En un sistema **M/M/5**, los clientes llegan a una tasa media de 24 clientes por hora y cada servidor atiende a una tasa media de 6 clientes por hora. La cola se hace en una sala de espera con 2 asientos ya que a los clientes no les gusta esperar de pie.

**24 clientes por hora**

**s = 5 servidores disponibles**

** clientes por hora**

**k = 2 asientos**

* 1. Calcular la probabilidad de que no haya personas de pie en la sala de espera.

**p(no haya parados) = p0 + p1 + p2 + … + p7 = Cp7 = 0.7162943726**

* 1. ¿Cuántos servidores debe haber, para que la probabilidad de que no haya personas de pie en la sala de espera sea por lo menos 0.99?

**La pregunta exacta debería decir, ¿cuántos servidores deben haber como mínimo para que p(no haya parados) >= 0.99?**

**s = 5 servidores**

**p(no haya parados) con s = 5 es Cp(k+s) = Cp7 = 0.7162943726 (no cumple)**

**Si s = 6, Cp8 = 0.9156264165 (no cumple)**

**Si s = 7, Cp9 = 0.9747899387 (no cumple)**

**Si s = 8, Cp10 = 0.9926195008 (cumple)**

**Por lo tanto, debe haber 8 servidores.**

* 1. Manteniendo los 5 servidores: ¿Cuántos asientos debe haber, para que la probabilidad de que no haya personas de pie en la sala de espera sea por lo menos 0.9?

**s = 5, ¿cuántos asientos debe haber como mínimo para que p(no haya parados) >= 0.9?**

**Mirando CalcularColas.xlsx con s = 5 y buscando cuáles tienen un CPn >= 0.9, encontramos que cuando n = 12 se excede 0.9. Cp12 = Cp(k+5) por lo tanto k = 7.**

* 1. p(haya más parados que sentados en la sala de espera):

**p10 + p11 + p12 + … = 1 – Cp9 = 0.1815716014**

* 1. ¿Cuántos asientos debe haber como mínimo para que la probabilidad de que haya más parados que sentados sea menor o igual a 0.001?

**k = 2, p(más parados que sentados) = 1 - Cp9 = 0.1815716014**

**k = 3, p(más parados que sentados) = 1 - Cp11**

**k = k, p(más parados que sentados) = 1 - Cp(2k+5) <= 0.001**

**1 - Cp33 <= 0.001**

**2k+5 = 33 .:. 2k = 28 .:. k = 14**

1. En un sistema **M/M/6**, los clientes llegan a una tasa media de 20 clientes por hora y cada servidor atiende a una tasa media de 4 clientes por hora. La cola se hace en una sala de espera con 2 asientos ya que a los clientes no les gusta esperar de pie.
   1. Calcular la probabilidad de que los dos asientos estén vacíos.
   2. Calcular la probabilidad de que haya **más de una persona de pie en la sala de espera**.
   3. ¿Cuántos servidores debe haber como mínimo para que la probabilidad de que haya **más de una persona de pie en la sala de espera** sea menor a 0.026?
   4. Manteniendo los 6 servidores: ¿Cuántos asientos debe haber como mínimo para que la probabilidad de que haya **más de una persona de pie en la sala de espera,** sea menor a 0.10?
   5. ¿Cuántos servidores debe haber como mínimo para que la cantidad promedio de clientes en el sistema sea el 64.3% del original?